Programme de khôlle MPSI n°9 - du 24/11/25 au 28/11/25

1. Primitives et intégrales
   - Définition de primitive
   - Toute fonction continue sur $[a, b]$ admet des primitives (toutes égales à une constante près)
   - Calcul de primitives et intégrales simples
   - Fonctions définies par une intégrale (montrer qu'elle sont définies, continues, dérivables, ... puis calculer leur dérivée).
   - Interprétation géométrique de l'intégrale et approximation avec les aires des rectangles
   - Relation de Chasles (application au calcul d'intégrale de valeurs absolues...)
   - Propriétés de l'intégrale (positivité, croissance, si l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle alors la fonction est nulle, majoration de la valeur absolue d'une intégrale,...)
   - inégalité de la moyenne
   - Intégration par parties
   - Changement de variable
   - Intégrales de fonctions de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$
   - Intégrales de fonctions à valeurs complexes

2. EDL 1
   - Solution de $y' + ay = 0$ (a constante)
   - Solution de $y' + a(x)y = 0$
   - L'ensemble des solutions des l'équation homogène contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire.
   - Solution de $y' + a(x)y = b(x)$
   - Méthode de la variation de la constante
   - Principe de superposition
   - Problème de Cauchy

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- **Primitives et intégrales**

  Soient f et g des fonctions continues sur $[a, b]$ $(a \leq b)$.

  1. Si f est positive sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
  2. Si $\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
  3. Si f est positive et continue sur $[a, b]$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $\forall x \in [a, b],\ f(x) = 0$
  4. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$
  5. Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$ et impaire. Alors on a : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
  6. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.
     Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$

- **EDL 1**

  1. Montrer que l'ensemble S des solutions de l'équation homogène contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire.
  2. Montrer que toute solution de l'équation non homogène est somme d'une solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.
  3. Énoncer et démontrer le principe de superposition.