Programme de khôlle MPSI n°1 - du 15/09/25 au 19/09/25

1. Notations, méthodes de raisonnement :

   - Ensembles : vocabulaire, opérations, partition d'un ensemble, produit cartesien, ensemble des parties, ensembles de nombres usuels.
   - Logique : quantificateurs, implications, équivalence, négation.
   - Méthodes de démonstration :

     (i) $\forall x \in E, P(x)$"

     (ii) $\exists ! x \in E, P(x)$"

     (iii) $A \subset B$

     (iv) $P_1 \Rightarrow P_2$" (deux types de démonstration possibles)

     (v) $P_1 \Leftrightarrow P_2$.

     (vi) "Prouver que les éléments de E sont les fonctions telles que ..."

     (vii) Démonstration par disjoinction de cas

     (viii) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$" (démonstration par récurrence : rédactions types de la récurrence simple, à deux crans et forte).

     (ix) Démonstration par absurde.

     (x) Démonstration par analyse synthèse.

2. Calcul algébrique

   - Calculs avec $\sum$
     - somme des termes d'une suite arithmétique
     - somme des termes d'une suite géométrique
     - changements d'indices
     - sommes télescopiques...
     - **pas de sommes doubles!**

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- **Notations, méthodes de raisonnement**

  1. *On admet que si A et B sont deux ensembles finis disjoints, alors :*

  $$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B).$$

     Montrer la formule $\boxed{\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A \cap B)}$ pour A et B deux ensembles finis quelconques.

     (on pourra exploiter un dessin pour illustrer la démonstration, mais on écrira aussi les formules pour chaque ensemble et les calculs...)

  2. Soit E un ensemble fini. Soit $A \subset E$. Montrer $\boxed{\operatorname{Card}(\overline{A}) = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A.}$

- **Sommes et produits** (soit $n \in \mathbb{N}^*$)

  3. Formule et démonstration pour $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k.}$

  4. Formule et démonstration pour $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2.}$

  5. Formule et démonstration pour $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3.}$

  6. Formules et démonstrations pour $\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k.}$ (Faire la disjonction de cas : $x = 1$, $x \neq 1$).