Programme de khôlle MPSI n°14 - du 19/01/26 au 23/01/26

1. <u>Dérivabilité</u>
   - Dérivabilité à gauche/à droite en un point
   - Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée
   - Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable
   - Dérivabilité et continuité
   - Interprétation géométrique : tangente
   - Extremum local, point critique
   - Théorème de Rolle
   - Égalité des accroissements finis.
   - Inégalité des accroissements finis.
   - Fonctions lipschitziennes
   - Fonctions contractantes et suites définies par récurrence
   - Théorème de la limite de la dérivée
   - Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ et formule de Leibniz
   - Recollement de solutions d'équations différentielles
   - Dérivabilité de fonctions complexes
2. <u>Convexité</u>
   - Définition de fonction convexe/concave, interprétation géométrique et exemples
   - Inégalité de Jensen (inégalité de convexité généralisée)
   - Inégalité des pentes
   - Une fonction f (définie sur I) est convexe si et seulement si $\forall a \in I$, τ_a est croissante ($\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$)
   - Si f dérivable : f convexe si, et seulement si, f' croissante
   - Si f dérivable et convexe sur I : $\forall (x,a) \in I^2,\ f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$ + interprétation géométrique
   - Si f deux fois dérivable : f convexe ssi f'' positive

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- **Dérivabilité**
  1. **Connaître les définitions et les enoncés du cours**
  2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$ un point de l'intérieur de I, et soit f dérivable en a. Si f admet un extremum relatif en a, alors $f'(a) = 0$.
  3. théorème de Rolle
  4. Montrer que si f dérivable sur $]a,b[$ et $\forall x \in]a,b[\ f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante.
  5. f lipschitzienne $\Rightarrow$ f continue.