Programme de khôlle MPSI n°13 - du 12/01/26 au 16/01/26

1. Limites et continuité

   - Limite en un point, continuité en un point
   - Limites à droite/à gauche en un point, continuité à droite/à gauche en un point.
   - Limites en $\pm\infty$
   - Unicité de la limite
   - Caractérisation séquentielle de la limite
   - Opérations sur les limites
   - Propriétés liées à l'ordre (en particulier : théorème des gendarmes, théorème de la limite monotone)
   - Prolongement par continuité
   - Calcul de limites avec le taux d'accroissement
   - Théorème des valeurs intermediaires
   - Image d'un intervalle par une fonction continue (en particulier lorsqu'il s'agit d'un segment)
   - Théorème de la bijection monotone
   - Limites de fonctions complexes

2. Dérivabilité

   - Dérivabilité à gauche/à droite en un point
   - Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée
   - Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable
   - Dérivabilité et continuité
   - Interprétation géométrique : tangente
   - Extremum local, point critique
   - Théorème de Rolle
   - Égalité des accroissements finis **(pas l'inégalité ni les fonctions lipschitziennes)**

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- **Limites, continuité**

  1. **Définitions du cours :** limites finies/infinies pour $x \to a, x \to \pm\infty$, continuité en un point, limite à droite/gauche, continuité à droite/gauche, prolongement par continuité
  2. Unicité de la limite
  3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Alors, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I et tendant vers a on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$. (démonstration vue dans le cas a et ℓ finis).
  4. Soient $\lambda, \mu, \ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x\to a} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda\ell + \mu\ell'$.

- **Dérivabilité**

  1. **Connaître les définitions et les enoncés du cours**
  2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$ un point de l'intérieur de I, et soit f dérivable en a. Si f admet un extremum relatif en a, alors $f'(a) = 0$.
  3. théorème de Rolle : énoncé et démonstration.