EXERCICE 49

Montrons que $(G, \star)$ est un groupe.

- **loi interne :** soient (x, y) et (x', y') deux éléments de G. Alors $xx' \in \mathbb{R}^*$ et $xy' + y \in \mathbb{R}$ donc $(x, y) \star (x', y') \in G$.
- **associative :** soient (a, b), (c, d) et (e, f) trois éléments de G. D'une part :

  $$\big((a,b) \star (c,d)\big) \star (e,f) = (ac, ad+b) \star (e,f) = (ace, acf + ad + b.$$

  D'autre part :

  $$(a,b) \star \big((c,d) \star (e,f)\big) = (a,b) \star (ce, cf+d) = (ace, acf + ad + b).$$

  Donc $\big((a,b) \star (c,d)\big) \star (e,f) = (a,b) \star \big((c,d) \star (e,f)\big)$ et la loi est associative.
- **élément neutre :** on voit facilement que $(1,0)$ est l'élément neutre de cette loi. En effet, pour tout $(x, y) \in G$:

  $$(x,y) \star (1,0) = (x,y) \quad \text{et} \quad (1,0) \star (x,y) = (x,y).$$

- **élément symétrique :** soit $(x, y) \in G$. On considère l'élément $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$.

  On a bien $(x,y) \star \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) = (1,0)$ et $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) \star (x,y) = (1,0)$, donc $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$ est bien le symétrique de (x, y).

On peut conclure que G est un groupe.
Par contre, G n'est pas commutatif en effet :

$$(1,2) \star (3,4) = (3,6) \quad \text{et} \quad (3,4) \star (1,2) = (3,10).$$

EXERCICE 50

On va faire l'exercice avec deux méthodes différentes (avec la définition de groupe et avec la proposition du cours).

- <u>Méthode 1 :</u>
  - loi interne : soient $x, y \in H$ alors il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a^n$ et $y = a^m$. Mais alors $xy = a^n \times a^m = a^{n+m}$ et $n + m \in \mathbb{Z}$ donc $xy \in H$.
  - associativité : vraie dans $\mathbb{C}$ donc vraie aussi dans un sous-ensemble
  - élément neutre : $1 = a^0 \in H$ est l'élément neutre pour la multiplication.
  - élement symétrique : soit $x \in H$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a^n$. Mais alors $a^{-n} \in H$ est l'élément symétrique de x.
- <u>Méthode 2 :</u>
  - $1 \in H$ donc $H \neq \emptyset$.
  - Soient $x, y \in H$. Montrons que $x \cdot y^{-1} \in H$.
    En effet il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a^n$ et $y = a^m$. Mais alors $x \cdot y^{-1} = a^{n-m}$ et $n - m \in \mathbb{Z}$ donc $x \cdot y^{-1} \in H$.

EXERCICE 51

1. On sait que x est nilpotent, donc $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

   Mais alors :

   $$(xy)^n = xy \cdot xy \cdot xy \cdots xy = x^n \cdot y^n = 0$$

   (on a utilisé le fait que $xy = yx$ sinon on n'aurait pas pu regrouper les x d'un côté et les y de l'autre).

   On en déduit que xy est nilpotent.

2. x et y sont nilpotents, donc $\exists (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $x^n = 0$ et $y^m = 0$.

   Mais alors :

   $$(x+y)^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} x^k y^{n+m-1-k}.$$

   Soit $k \in [\![0, n+m-1]\!]$: on regarde le k-ème terme de la somme : si $k \geqslant n$ alors $x^k = 0$ donc le terme s'annule. Si $k < n$ alors $n+m-1-k \geqslant m$ donc $y^{n+m-1-k} = 0$ et dans ce cas aussi le terme de la somme s'annule.

   On en déduit que la somme précédente est nulle et donc : $(x+y)^{n+m-1} = 0$. Donc $x+y$ est nilpotent.

3. Si xy est nilpotent, alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(xy)^n = 0$.

   Or, $(yx)^{n+1} = (yx)(yx)\cdots(yx) = y(xy)(xy)\ldots(xy)x = y \cdot (xy)^n x = 0$ (on a utilisé l'associativité du produit) donc yx est nilpotent.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

   On a :

   $$(1 - x^n) = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

   (chapitre 2)

   Mais alors

   $$(1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = 1.$$

   De même,

   $$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})(1-x) = 1.$$

   On en déduit que $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$ est l'inverse multiplicatif de $(1-x)$ et donc $(1-x)$ est inversible.