

EXERCICE 27

Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -5y = -5 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$$

On obtient que l'unique point d'intersection des droites D_1 et D_2 est $P(2;1)$

EXERCICE 28

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ -x + 4y + z = -1 \\ 3x - 2y - 3z = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 3y + 4z = 1 \\ y - 12z = -2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 3y + 4z = 1 \\ -40z = -7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{63}{40} \\ y = \frac{1}{10} \\ z = \frac{7}{40} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $S = \left\{ \left(\frac{63}{40}, \frac{1}{10}, \frac{7}{40} \right) \right\}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - 6y + 2z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -5z = 0 \\ -7z = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $S = \{ (2\alpha, \alpha, 0) ; \alpha \in \mathbb{R} \}$

EXERCICE 30

On remarque que $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 + 1 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2 + 1)x + 2ay = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + 1)x + 2ay = 1 \\ ax + y = 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + 1)x + 2ay = 1 \\ ((a^2 + 1) - 2a^2)y = 2(a^2 + 1) - a \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow (a^2 + 1)L_2 - aL_1) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + 1)x + 2ay = 1 \\ (1 - a^2)y = 2a^2 - a + 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Trois cas possibles :

- Si $a = 1$ on obtient le système

$$\begin{cases} (a^2 + 1)x + 2ay = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

donc $S = \emptyset$

- Si $a = -1$ on obtient le système

$$\begin{cases} (a^2 + 1)x + 2ay = 1 \\ 0 = 5 \end{cases}$$

donc $S = \emptyset$

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ on obtient

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a^2 + 1} \cdot \left(1 - 2a \cdot \frac{2a^2 - a + 2}{1 - a^2} \right) = \dots = \frac{-4a + 1}{1 - a^2} \\ y = \frac{2a^2 - a + 2}{1 - a^2} \end{cases}$$