EXERCICE 13

- **Initialisation :** pour $n = 0$ on a : $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) = 2$ et $\sqrt{2n+3} = \sqrt{3}$ donc l'inégalité est vérifiée.

- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2n+3}$ (HR).

  (On veut montrer que $\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2(n+1)+3}$.

  Or : $\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) \times \frac{2n+4}{2n+3}$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2n+3}$, donc on peut en déduire :

  $$\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2n+3} \times \frac{2n+4}{2n+3}$$

  Pour montrer l'hérédité, il suffit de montrer que : $\frac{\sqrt{2n+3}}{2n+3} \times (2n+4) > \sqrt{2n+5}$, c'est-à-dire $\frac{2n+4}{\sqrt{2n+3}} > \sqrt{2n+5}$.

  En passant au carré on obtient : $\frac{4n^2+16n+16}{2n+3} > 2n+5$, qui équivaut à $4n^2+16n+16 > (2n+5)(2n+3)$ puis $4n^2 + 16n+16 > 4n^2+16n+15$ et enfin $1 > 0$ qui est toujours vraie.

  On en déduit que $\frac{\sqrt{2n+3}}{2n+3} \times (2n+4) > \sqrt{2n+5}$ et donc, par transitivité, $\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2(n+1)+3}$. Cela termine l'hérédité.

- **Conclusion :** la propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 14

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On veut montrer que pour tout $n \geqslant 2$, H_n est de la forme $\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n un entier impair et q_n un entier pair (cela impliquera bien sûr que $H_n \notin \mathbb{Z}$).

On va faire une démonstration par récurrence forte.

- **Initialisation :** pour $n = 2$, on obtient $H_2 = \frac{3}{2}$ donc la propriété est vraie.

- **Hérédité :** soit $n \geqslant 2$ tel que pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ avec p_k impair et q_k pair.

  On veut montrer que $H_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ avec p_{n+1} impair et q_{n+1} pair.

  On va raisonner par disjoinction de cas :

  1. Si n pair, alors $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{p_n(n+1)+q_n}{q_n(n+1)}$ or p_n impair, q_n pair et $(n+1)$ impair, donc $p_n(n+1)+q_n$ est impair et $q_n(n+1)$ est pair, ce qui nous permet de conclure que $H_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ avec p_{n+1} impair et q_{n+1} pair.
  2. Si n impair, on peut écrire $n = 2k-1$, avec $k \geqslant 2$ (car $n \geqslant 3$).

     On a donc $H_{n+1} = \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$ (en séparant les termes pairs et impairs de la somme).

     Donc $H_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2} H_k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$.

     Or $2 \leqslant k \leqslant 2k-1 \leqslant n$ donc $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ avec p_k impair et q_k pair par hypothèse de récurrence (forte!) et $\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$ est de la forme $\frac{K}{2K'+1}$ (i.e. avec un dénominateur impair, car on somme des fractions ayant toutes dénominateur impair).

     Mais alors $H_{n+1} = \frac{p_k(2K'+1)+2Kq_k}{2q_k(2K'+1)}$. Comme $p_k(2K'+1)$ est impair et $2Kq_k$ est pair, alors le numérateur est impair. D'autre part, il est évident que le dénominateur est pair, donc H_{n+1} est bien de la forme $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ avec p_{n+1} impair et q_{n+1} pair.

On a donc terminé la récurrence ce qui prouve la propriété voulue.

EXERCICE 17

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé.

On fait une démonstration par récurrence sur $n \geqslant p$.

- **Initialisation :** pour $n = p$: $\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{p}{p} = 1$ et $\binom{n+1}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} = 1$ donc l'égalité est vraie.

- **Hérédité :** soit $n \geqslant p$ tel que $\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ (HR).

  (On veut montrer que $\sum_{i=p}^{n+1} \binom{i}{p} = \binom{n+2}{p+1}$)

  Or : $\sum_{i=p}^{n+1} \binom{i}{p} = \sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$ d'après la formule de Pascal (Proposition 12 du cours).

  L'hérédité est donc prouvée.

- **Conclusion :** la propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant p$.

EXERCICE 18

$$S=\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=1}^{p}(i+j)=\sum_{i=0}^{n}\big((i+1)\times(i+2)\times\cdots\times(i+p)\big)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(i+p)!}{i!}=p!\sum_{i=0}^{n}\frac{(i+p)!}{p!\,i!}=p!\sum_{i=0}^{n}\binom{i+p}{p}$$

Ensuite on fait le changement d'indice $j=i+p$

$$S=p!\sum_{j=p}^{n+p}\binom{j}{p}.$$

Et grâce à la formule de Pascal généralisée :

$$S=p!\binom{p+n+1}{p+1}=\frac{p!\,(p+n+1)!}{(p+1)!\,n!}=\frac{(p+n+1)!}{(p+1)\,n!}.$$