EXERCICE 105

On sait que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, a+2h]$, donc la fonction φ, définie par $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, a+h]$.
On a : $\varphi(a) = f(a+h) - f(a)$ et $\varphi(a+h) = f(a+2h) - f(a+h)$,
donc $\boxed{\varphi(a+h) - \varphi(a) = f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}$
D'autre part, pour tout $x \in [a, a+h]$, on a : $\boxed{\varphi'(x) = f'(x+h) - f'(x)}$
Donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $b \in]a, a+h[$ tel que $\varphi(a+h) - \varphi(a) = h \cdot \varphi'(b)$
Mais alors $\boxed{\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\left(f'(b+h) - f'(b)\right)}$
f' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, a+2h]$, donc elle est $\mathscr{C}^1$ en particulier sur $[b, b+h]$.
Mais alors on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f' sur $[b, b+h]$:
il existe $c \in]b, b+h[$ $(\subset]a, a+2h[)$ tel que

$$\boxed{f'(b+h) - f'(b) = h \cdot f''(c)}$$

En utilisant les égalités encadrées on obtient :

$$\boxed{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 \cdot f''(c)}$$

EXERCICE 107

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - f(-x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 0$.
D'après le théorème des accroissements finis (sur $[0, x]$) il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$g(x) - g(0) = x \cdot g'(c)$$

Mais pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = f'(x) + f'(-x)$, donc on en déduit :

$$\boxed{f(x) - f(-x) = x\left(f'(c) + f'(-c)\right)}$$

EXERCICE 108

- **Première solution : avec des "pointillets" :**

  f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b) = 0$, donc (Rolle) $\exists c_1 \in]a, b[$ tel que $f'(c_1) = 0$

  f' continue sur $[a, c_1]$, dérivable sur $]a, c_1[$ et $f'(a) = f'(c_1) = 0$, donc (Rolle) $\exists c_2 \in]a, c_1[$ tel que $f''(c_2) = 0$

  $\vdots$

  $f^{(n-1)}$ continue sur $[a, c_{n-1}]$, dérivable sur $]a, c_{n-1}[$ et $f^{(n-1)}(a) = f^{(n-1)}(c_{n-1}) = 0$ donc (Rolle) $\exists c_n \in]a, c_{n-1}[$ tel que $f^{(n)}(c_n) = 0$.

- **Deuxième solution : par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$**

  - Si $n = 1$ c'est le théorème de Rolle.
  - Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons la pour $n+1$: on sait que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f(b) = 0$ donc par hypothèse de récurrence, il existe $c_0 \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c_0) = 0$. Mais on sait aussi que $f^{(n)}(a) = 0$ et comme f dérivable $(n+1)$ fois, alors $f^{(n)}$ est continue sur $[a, c_0]$ et dérivable sur $]a, c_0[$, donc par le théorème de Rolle, $\exists c \in]a, c_0[\subset]a, b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$.

EXERCICE 109

- **Existence :** Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. Alors $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$. Si $g(0) = 0$ ou $g(1) = 0$ on a trouvé un point fixe. Sinon $g(0)g(1) < 0$ et g continue (par somme de fonctions continues) donc on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$ mais alors $f(c) = c$.

- **Unicité :** Supposons par absurde qu'il existe deux nombres $x_1 < x_2$ dans $[0,1]$, telles que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$.

  On a alors $g(x_1) = g(x_2) = 0$. g continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$ (par somme de fonctions dérivables), donc par le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $g'(x_0) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - 1$ donc $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 1$.

  Par croissance de f' on sait donc que $\forall x \in [x_0, 1],\ f'(x) \geq 1$.

  On applique ensuite le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[x_0, 1]$ (f continue sur $[x_0, 1]$, dérivable sur $]x_0, 1[$) : il existe $c \in]x_0, 1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \dfrac{f(1) - x_0}{1 - x_0}$. Mais $f(1) < 1$, donc $f(1) - x_0 < 1 - x_0$ par conséquent $f'(c) < 1$ ce qui contredit le fait que $f'(x) \geq 1\ \forall x \in [x_0, 1]$. Absurde. Donc $x_1 = x_2$.

EXERCICE 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(E_n) \qquad xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$$

$$(H_n) \qquad xy' - (n - 2x^2)y = 0.$$

1. Sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$ l'équation (H_n) est équivalente à :

   $$(H_n') \qquad y' - \frac{(n - 2x^2)}{x} y = 0.$$

   Or sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$ $\displaystyle\int \left(\frac{n}{x} - 2x\right) \mathrm{d}x = n \ln|x| - x^2 + K, K \in \mathbb{R}$.

   Donc sur $]0, +\infty[$ la solution générale de (H_n') est $y_1(x) = \lambda_1 e^{n \ln x - x^2} = \lambda_1 x^n e^{-x^2}$. $\quad (\lambda_1 \in \mathbb{R})$

   Et sur $]-\infty, 0[$ la solution générale de (H_n') est $y_2(x) = \lambda e^{n \ln(-x) - x^2} = \lambda(-x)^n e^{-x^2} = \lambda(-1)^n x^n e^{-x^2} = \lambda_2 x^n e^{-x^2}$.
   $(\lambda \in \mathbb{R}, \lambda_2 = (-1)^n \lambda)$.

2. On cherche une solution particulière constante de (E_n) (sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$). On obtient

   $$-(n - 2x^2)y = n - 2x^2.$$

   Donc $y = -1$.

   Donc les solutions de (E_n) sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$ sont toutes de la forme

   $$y(x) = -1 + \lambda x^n e^{-x^2},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. **Analyse :** Si y est une solution de (E_n) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

   $$y(x) = -1 + \lambda_1 x^n e^{-x^2} \quad \forall x \in]-\infty, 0[$$
   $$y(x) = -1 + \lambda_2 x^n e^{-x^2} \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

   Or $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = -1$, donc $y(0) = -1$ (pour que y soit continue en 0).

   D'autre part

   $$y'(x) = \begin{cases} \lambda_1 (nx^{n-1} e^{-x^2} + x^n(-2x)e^{-x^2} = \lambda_1 e^{-x^2}(nx^{n-1} - 2x^{n+1}) & \text{pour } x \in]-\infty, 0[\\ \lambda_2 e^{-x^2}(nx^{n-1} - 2x^{n+1}) & \text{pour } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

   - Si $n = 1$ $\lim\limits_{x \to 0-} y'(x) = \lambda_1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} y'(x) = \lambda_2$ donc par continuité de y' on obtient $\lambda_1 = \lambda_2$.
   - Si $n = 2$ $\lim\limits_{x \to 0-} y'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} y'(x) = 0$ donc λ_1 et λ_2 quelconques.

Synthèse :

- si $n=1$ on pose $y(x)=-1+\lambda x^n e^{-x^2}$. On vérifie que y est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$) et que y est bien une solution de (E_n) en 0 :
  $y(0)=-1$ et $y'(0)=\lambda$, on remplace dans (E_n) et on obtient $0\cdot y'-(1-2\cdot 0^2)(-1)=1$ ce qui convient.
- si $n\neq 1$, soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, on pose
  $$y(x)=\begin{cases}\lambda_1 x^n e^{-x^2} & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ -1 & \text{si } x=0\\ \lambda_2 x^n e^{-x^2} & \text{si } x\in]0,+\infty[.\end{cases}$$
  On prouve que y est une solution de (E_n) en 0 de la même manière que pour $n=1$, on sait que y est continue (vu dans l'analyse), il reste à prouver que les limites droite et gauche de $y'(x)$ en 0 (déjà calculées) coïncident avec $y'(0)$. Or $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{y(h)-y(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\lambda_2 e^{-h^2}h^n}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\lambda_2 e^{-h^2}h^{n-1}=0$ (car $n>1$) et de même à gauche, ce qui nous permet de conclure.

EXERCICE 116

On considère la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x)=e^x\big(f(x)-f'(x)\big)$.
g est dérivable par somme et produit de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x\in[a,b],\quad \boxed{g'(x)}=e^x\big(f(x)-f'(x)\big)+e^x\big(f'(x)-f''(x)\big)=\boxed{e^x\big(f(x)-f''(x)\big).}$$

On remarque que g satisfait les hypothèses du théorème de Rolle (g continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $g(a)=g(b)$), donc il existe $c\in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$ c'est-à-dire $f''(c)=f(c)$.

EXERCICE 117

Soit $x>0$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f=\ln$ sur $[x,x+1]$ (f est bien continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$).
On a donc : il existe $c\in]x,x+1[$ tel que $f'(x)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$ c'est-à-dire :

$$\frac{1}{c}=\ln(x+1)-\ln(x).$$

Or $c\in]x,x+1[$ donc $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$ donc on peut conclure

$$\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}.$$

À partir de l'inégalité précédente on obtient aussi, si $x>1$:

$$\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}<\ln(x)-\ln(x-1)$$

en additinnant les inégalités on a :

$$\sum_{p=n+1}^{kn}\big(\ln(p+1)-\ln(p)\big)<\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}<\sum_{p=n+1}^{kn}\big(\ln(p)-\ln(p-1)\big).$$

Les deux sommes étant téléscopiques on obtient :

$$\ln(kn+1)-\ln(n+1)<\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}<\ln(kn)-\ln(n)\quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(\frac{kn+1}{n+1}\right)<\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}<\ln\left(\frac{kn}{n}\right).$$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\dfrac{kn+1}{n+1}\right)=\ln\left(\dfrac{kn}{n}\right)=\ln(k)$, donc d'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}=\ln(k).}$$