EXERCICE 101

On a deux cas possibles :

- Soit $f(0) = 0$ et alors on a trouvé une solution a notre problème.
- Soit $f(0) \neq 0$. Dans ce cas, on peut considérer la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

  g est continue sur $]0, +\infty[$ (par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule jamais)
  et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ (car $f(0) > 0$ et $x \to 0^+$).

  Mais alors, par définition de limite, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]0, \delta], \quad g(x) \geq 10 > 1$. En particulier, on a $\boxed{g(\delta) = y_1 \geq 10 > 1.}$

  D'autre part, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell < 1$.

  En appliquant la définition de limite avec $\varepsilon = \dfrac{1 - \ell}{2}$ on a : $\exists M > 0$ tel que $\forall x \geq M$, $\left|g(x) - \ell\right| \leq \varepsilon$ (ou encore : $\ell - \varepsilon \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon$)

  Mais alors on a : $\boxed{g(M) = y_2 \leq \ell + \dfrac{1 - \ell}{2} < 1.}$

  On a donc trouvé deux points δ et M dans $]0, +\infty[$ tels que $g(\delta) = y_1 > 1$ et $g(M) = y_2 < 1$.

  On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermediaires (g est continue sur $]0, +\infty[$) pour en déduire qu'il existe $c \in [\delta, M]$ tel que $g(c) = 1$, c'est-à-dire $f(c) = c$, ce qui nous permet de conclure.