EXERCICE 84

On remarque que $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
et que pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$. La somme ayant n termes on en déduit que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n}$$

Mais alors on a : $H_1 = 1$, $H_2 - H_1 \geqslant \frac{1}{2}$, $H_4 - H_2 \geqslant \frac{1}{2}$, ..., $H_{2^k} - H_{2^{k-1}} \geqslant \frac{1}{2}$ (récurrence immédiate).

Donc en additionnant on obtient : $H_{2^k} - H_1 \geqslant \frac{k}{2}$, puis $\boxed{H_{2^k} \geqslant \frac{k}{2} + 1}$

Maintenant, on remarque que (H_n) est une suite croissante (à chaque fois on ajoute un terme positif) et non majorée (en effet, grâce à la propriété montrée précedemment, $\forall A > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $1 + \frac{k}{2} \geqslant A$ et donc $H_{2^k} \geqslant A$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.
(on peut aussi montrer que (H_n) est croissante puis raisonner par l'absurde : si (H_n) convergeait vers ℓ, on obtiendrait $\ell - \ell \geqslant \dfrac{1}{2}$ absurde, donc (H_n) ne peut pas converger, donc elle diverge vers $+\infty$).

EXERCICE 85

1. $v_n - v_{n-1} = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n}{n} - \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}}{n-1} = \dfrac{(n-1)(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n) - n(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1})}{n(n-1)}$
$= \dfrac{-u_1 - u_2 - \cdots - u_{n-1} + (n-1)u_n}{n(n-1)}$.

   Or comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geqslant u_k$ $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ donc $\dfrac{-u_1 - u_2 - \cdots - u_{n-1} + (n-1)u_n}{n(n-1)} \geqslant 0$ ce qui nous permet de conclure que (v_n) est croissante.

2. $$v_{2n} = \frac{u_1 + \cdots + u_{2n}}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} + \frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{n}\right).$$

   Or $\dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = v_n$ et $\dfrac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{n} \geqslant \dfrac{nu_n}{n} = u_n$ (car $u_k \geqslant u_n$ $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$).

   Par conséquent : $u_{2n} \geqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

3. (v_n) est une suite croissante et (v_n) est majorée par ℓ (car $u_k \leqslant \ell \forall k \in \mathbb{N}$). Donc (v_n) est une suite convergente.

   Soit $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{R}$.

   On passe à la limite dans l'inégalité trouvée à la question précedente et on obtient

   $$\lim_{n\to+\infty} v_{2n} \geqslant \lim_{\to+\infty} \frac{u_n + v_n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \ell' \geqslant \frac{\ell + \ell'}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \ell' \geqslant \ell.$$

   Mais on sait que $\ell' \leqslant \ell$ (car (v_n) est majorée par ℓ) donc $\ell' = \ell$.