EXERCICE 75

$$(E) \qquad y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x).$$

On étudie tout d'abord l'équation homogène :

$$(H) \qquad y'' + \omega^2 y = 0$$

Or, les solutions de l'équation caractéristique ($x^2 + \omega^2 = 0$) sont ωi et $-\omega i$ donc la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x). \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche ensuite une solution particulière de (E), de la forme $y(x) = \alpha \cos(\omega_0 x)$ (raisonnement sur la parité et $\omega_0 i$ n'est pas solution de l'équation caractèristique).
$y'(x) = -\omega_0 \alpha \sin(\omega_0 x)$ et $y''(x) = -\omega_0^2 \alpha \cos(\omega_0 x)$. On remplace dans (E) et on obtient

$$(\omega^2 - \omega_0^2)\alpha \cos(\omega_0 x) = \cos(\omega_0 x) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Toutes les solutions de (E) sont donc de la forme

$$y(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 x) \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche maintenant l'unique solution du problème de Cauchy donné.
Tout d'abord on détermine $y'(x) = -\omega \lambda \sin(\omega x) + \mu \omega \cos(\omega x) - \dfrac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(\omega_0 x)$.
On remplace donc $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ et on obtient

$$\begin{cases} \lambda + \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} = 1 \\ \\ \mu\omega = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 - \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Donc la solution du problème de Cauchy est

$$y(x) = \left(1 - \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \cos(\omega x) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 x).$$

EXERCICE 76

$$(E) \qquad y'' + a y' + b = 0$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = a^2 - 4b$.

- Si $\Delta > 0$ (i.e. $4b^2 < a^2$) alors la solution générale de (E) est de la forme $\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$. Pour que cette solution soit bornée sur $\mathbb{R}^+$ pour tout choix de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ il faut que r_1 et r_2 soient négatives (si et seulement si leur produit est positif et leur somme est négatif). Or $r_1 r_2 = b$ et $-r_1 - r_2 = a$. Par conséquent il faut imposer $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.

- Si $\Delta = 0$ alors les solutions sont de la forme $(\lambda + \mu x)e^{rx}$ donc elles sont bornées si et seulement si $r < 0$ si et seulement si $a > 0$ (et $b > 0$ par conséquent).

- Si $\Delta < 0$ alors les solutions sont de la forme $e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$ et elles sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha \leqslant 0$ (i.e. $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$).

On en conclut que dans tous les cas, les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $(a, b) \neq 0$.