EXERCICE 64

D'après la règle de Chasles on peut écrire : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

On a deux cas possibles :

- Soit $\frac{1}{c-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

  Dans ce cas on obtient :
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{b-c}{c-a}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$
  Mais alors :
  $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{b-a}\left(1+\frac{b-c}{c-a}\right)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$
  et donc :
  $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$
- Soit $\frac{1}{c-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

  Ce deuxième cas est analogue est on obtiendra :
  $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut donc conclure que l'inégalité de l'énoncé est toujours vérifiée.

EXERCICE 68

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto e^{-nx}g(x)$ est bien définie et continue sur $[0,1]$ (par produit de fonctions continues), donc cette fonction admet une primitive sur $[0,1]$.
2. (a) $\boxed{I_0} = \int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = \boxed{1-\frac{2}{e}}$

   (On a fait une IPP avec $u(x) = x$, $v(x) = -e^{-x}$ fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$).

   (b) $\boxed{I_0} = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\arctan^2 x}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi^2}{32}}$
3. $|I_n| \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\left|g(x)\right|\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_0^1 e^{-nx} = M\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = M\left(-\frac{e^{-n}}{n}+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{M}{n}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M}{n} = 0$, donc par le théorème des gendarmes (encadrement), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.