EXERCICE 58

On a

$$f(x) = (1+e^x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx}.$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ($x \mapsto 1+e^x$ et $x \mapsto x^n$).
On dérive deux fois les deux expressions de f :

$$f'(x) = n(1+e^x)^{n-1} \cdot e^x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k e^{kx}$$

puis

$$\begin{aligned} f''(x) &= n(n-1)(1+e^x)^{n-2} \cdot e^{2x} + n(1+e^x)^{n-1} \cdot e^x \\ &= ne^x(1+e^x)^{n-2}\left((n-1)e^x + (1+e^x)\right) \end{aligned}$$

ou bien

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 e^{kx}$$

En évaluant ces deux epressions en 0 on obtient

$$f''(0) = 2^{n-2} \cdot n(n+1)$$

et

$$f''(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2.$$

On peut donc en déduire

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = 2^{n-2} \cdot n(n+1).}$$

EXERCICE 59

1. $\ln(1+x) \leqslant x$: montré en classe.

   Montrons que, pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x)$.

   On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

   $$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2.$$

   On veut montrer que f est positive sur $\mathbb{R}^+$.

   f est dérivable par somme et composition de fonctions dérivables.

   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

   $$f'(x) = \frac{1}{1+x} + x - 1 = \frac{1+x^2-1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$

   On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) > 0$ et on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $f(0) = 0$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geqslant 0$.

   On peut donc conclure que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x)$.

2. On remarque que
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)\right)$$
(tous les facteurs du produit sont strictement positifs, donc le ln est bien défini).

On s'intéresse donc à $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)$.

On a (d'après les propriétés de ln) : $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Alors $\frac{k}{n^2}\geqslant 0$ et donc, grâce à la question 1, on sait que $\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\leqslant\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leqslant\frac{k}{n^2}$.

En passant aux sommes on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

En développant les sommes de gauche et de droite :
$$\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leqslant\frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}=0$,

donc d'après le théorème des gendarmes on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$ puis, en composant avec l'exponentielle,
$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)=e^{1/2}=\boxed{\sqrt{e}}$$

EXERCICE 61

On va démontrer la formule par récurrence à deux crans.

- **Initialisation :**
  - $(n=0)$: $f_0:x\mapsto e^{1/x}$, f_0 est dérivable par composition de fonctions dérivables (sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$) et $f_0'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{1/x}=\frac{(-1)^{0+1}}{x^{0+2}}e^{1/x}$.
  - $(n=1)$: $f_1:x\mapsto xe^{1/x}$ est dérivable (deux fois) sur $\mathbb{R}_+^*$ (par composition) et $f_1''(x)=\left(e^{1/x}-x\frac{1}{x^2}e^{1/x}\right)'=-\frac{1}{x^2}e^{1/x}+\frac{1}{x^3}e^{1/x}+\frac{1}{x^2}e^{1/x}=\frac{1}{x^3}e^{1/x}=\frac{(-1)^{1+1}}{x^{1+2}}e^{1/x}$.
- **Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que la formule soit vraie pour n et pour $(n-1)$.
  On veut calculer $f_{n+1}^{(n+2)}$ (avec $f_{n+1}(x)=x^{n+1}e^{1/x}=xf_n(x)$).

$f_{n+1}^{(n+2)}(x)=\left((xf_n(x))'\right)^{(n+1)}=\left(f_n(x)+xf_n'(x)\right)^{(n+1)}=f_n^{(n+1)}(x)+\left(x\left(nx^{n-1}e^{1/x}+x^n\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x}\right)\right)^{(n+1)}$

$=f_n^{(n+1)}(x)+\left(nx^ne^{1/x}\right)^{(n+1)}-\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1)}=f_n^{(n+1)}(x)+nf_n^{(n+1)}(x)-\left(f_{n-1}^{(n)}(x)\right)'$ (on reconnaît $f_{n-1}(x)$ et $f_n(x)$)

$=(n+1)f_n^{(n+1)}(x)-\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{1/x}\right)'$ par hypothèse de récurrence sur $f_{n-1}^{(n)}(x)$.

$=(n+1)f_n^{(n+1)}(x)+(-1)^{n-1}\frac{(-n-1)}{x^{n+2}}e^{1/x}-\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x}$ (on a dérivé la partie entre parenthèses)

$= (n+1) f_n^{(n+1)}(x) - (n+1) f_n^{(n+1)}(x) + \dfrac{(-1)^{n+2}}{x^{n+3}} e^{1/x}$ par hypothèse de récurrence sur $f_n^{(n+1)}(x)$.

$= \dfrac{(-1)^{n+2}}{x^{n+3}} e^{1/x}$ ce qui prouve la formule pour $f_{n+1}^{(n+2)}$.