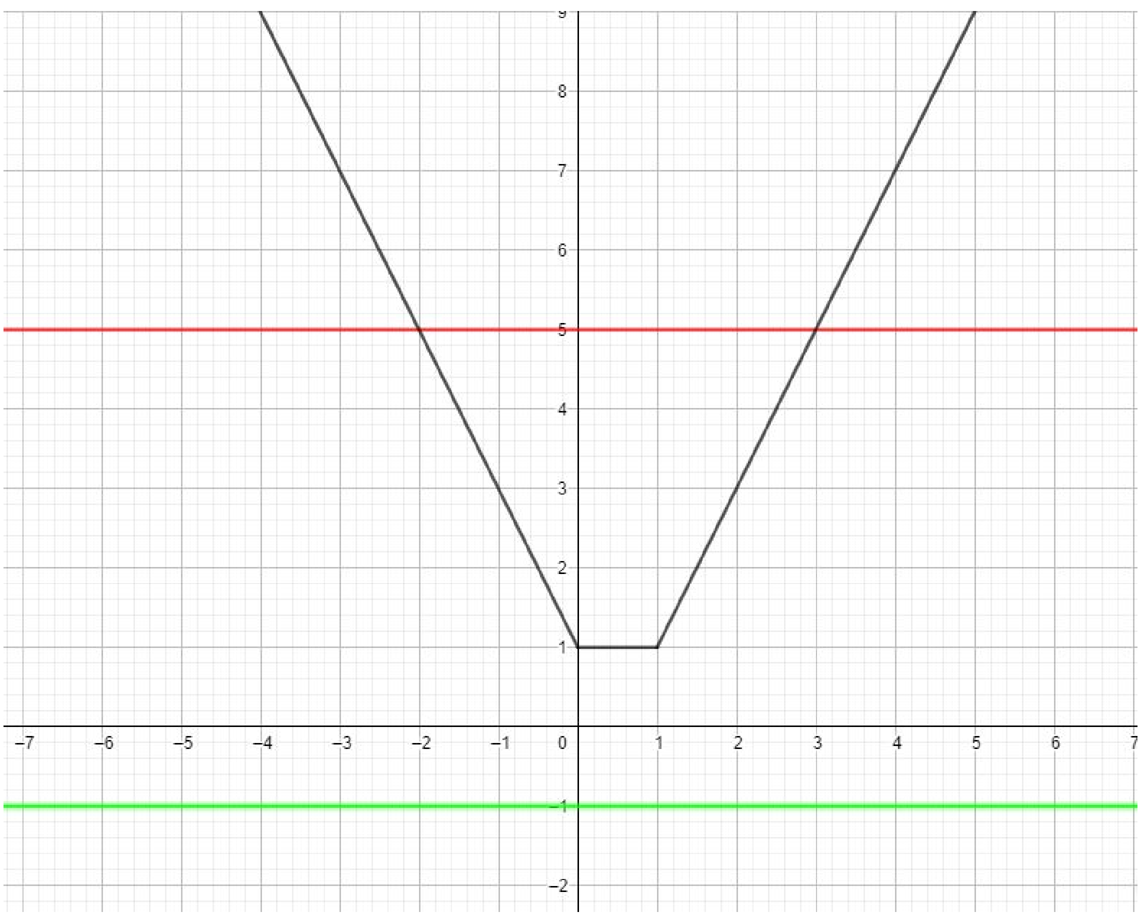
EXERCICE 52

On fait une disjonction de cas :

- Si $x < 0$: $|x| = -x$ et $|x-1| = 1-x$ donc $f(x) = 1-2x$
- Si $x \in [0,1]$: $|x| = x$ et $|x-1| = 1-x$ donc $f(x) = 1$
- Si $x > 1$: $|x| = x$ et $|x-1| = x-1$ donc $f(x) = 2x-1$.

On obtient le graphique suivant :



Pour résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant a$ il faut faire aussi une disjonction de cas :

- Si $a \leqslant 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant a$ donc $\boxed{S = \mathbb{R}}$.
- Si $a > 1$ alors on résout les deux inéquations : $1-2x \geqslant a$ et $2x-1 \geqslant a$ pour obtenir les deux intervalles solutions.

  On obtient $x \leqslant \dfrac{1-a}{2}$ pour le premier et $x \geqslant \dfrac{1+a}{2}$ pour le second.

  Donc $\boxed{S = \left]-\infty, \dfrac{1-a}{2}, \dfrac{1+a}{2}, +\infty\right]}$

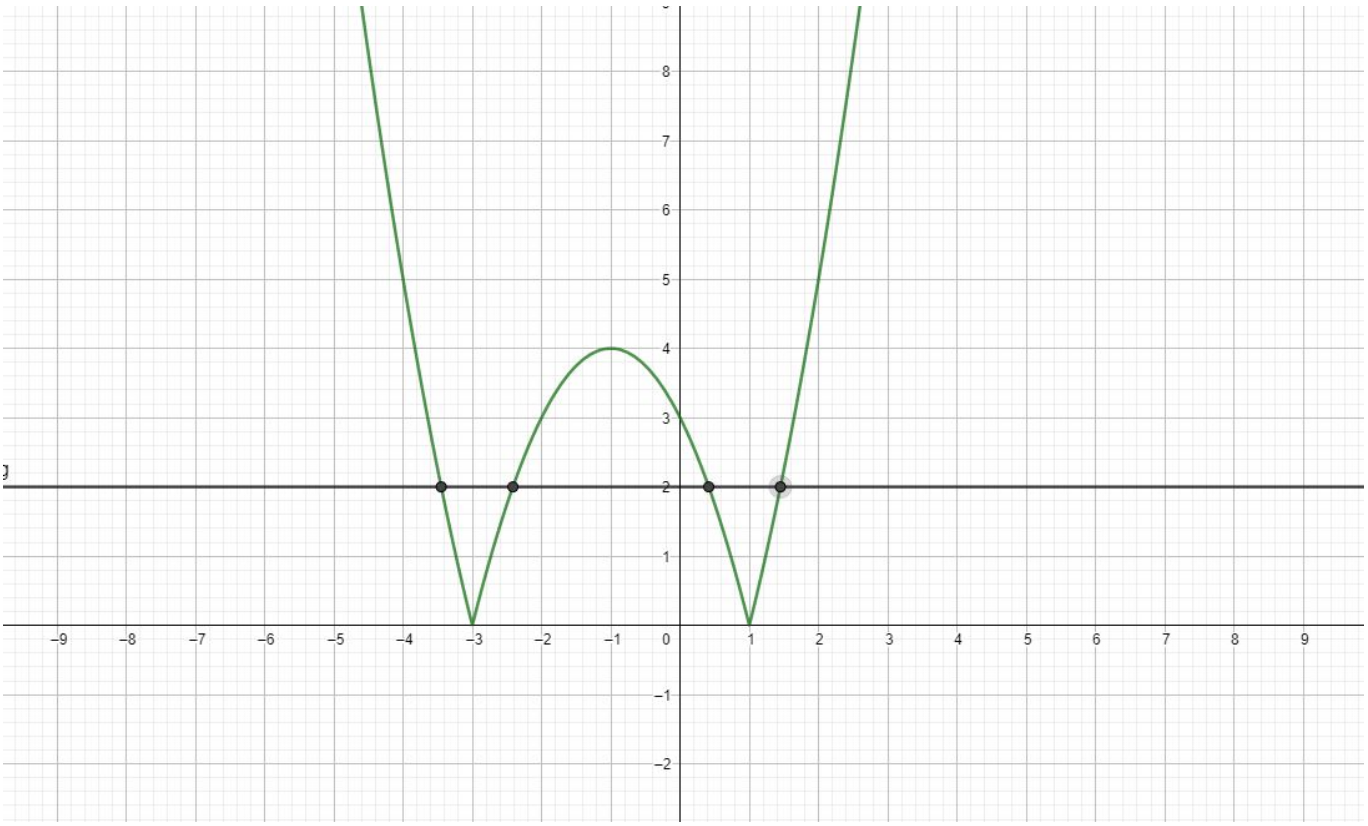
EXERCICE 53

1. On étudie le signe de $-x^2-2x+3$. Le discriminant est $\Delta = 4+12 = 16$. Les racines sont : -3 et 1.

   On en déduit que $-x^2-2x+3 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-3,1]$.

   On a donc

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-2x+3 & \text{si } x \in [-3,1] \\ x^2+2x-3 & \text{sinon} \end{cases}$$



2.

3. (a) Voir graphique.

   (b) Si $x \in [-3,1]$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad -x^2-2x+3 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -x^2-2x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left\{-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\right\} \end{aligned}$$

   (on vérifie que les deux solutions trouvée appartiennent bien à l'intervalle $[-3,1]$).
   Sit $x \in \mathbb{R} \setminus [-3,1]$:

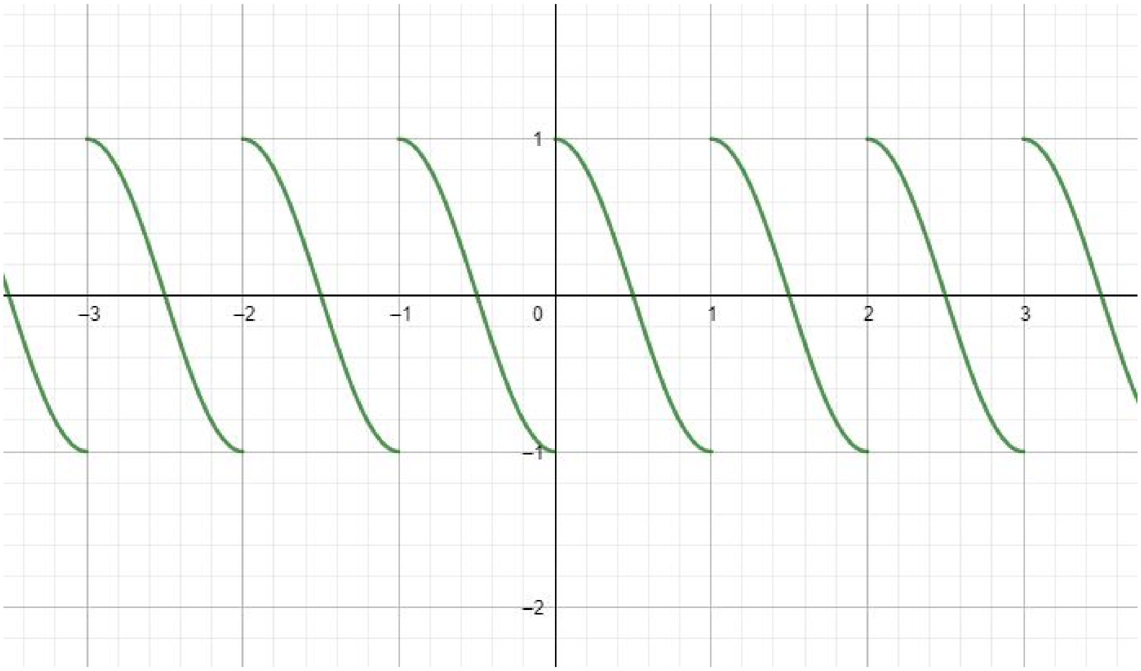
$$\begin{aligned} f(x) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+2x-3 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+2x-5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left\{-1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}\right\} \end{aligned}$$

   (on vérifie que les deux solutions trouvée appartiennent bien à $\mathbb{R} \setminus [-3,1]$).
   Conclusion : l'équation $f(x) = 2$ possède 4 solutions : $-1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{6}$ et $-1+\sqrt{6}$

Exercice 54

1. f est périodique de période 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = \cos(\pi \text{frac}(x+1)) = \cos(\pi \text{frac}(x)) = f(x)$$



2.

Exercice 55

1. Pour $x \geqslant 0$ $3|x|-7 = 3x-7$ pour que la racine carrée soit définie il faut $3x-7 \geqslant 0$ donc $x \geqslant \frac{7}{3}$.

   Pour $x < 0$ $3|x|-7 = -3x-7$ pour que la racine carrée soit définie il faut $-3x-7 \geqslant 0$ donc $x \leqslant -\frac{7}{3}$.

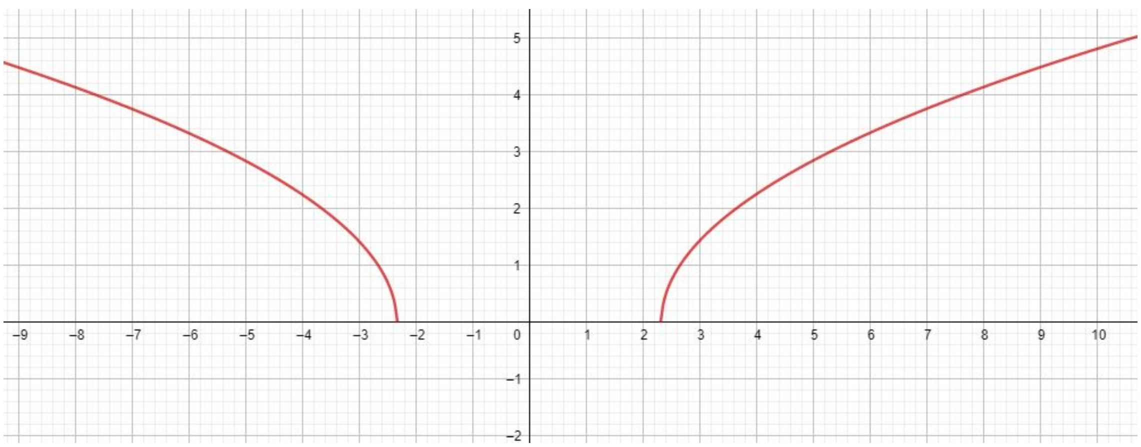
   L'ensemble de définition est $D = \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, +\infty\right[$.

2. L'ensemble de définition D est symétrique par rapport à l'origine, de plus $\forall x \in D$, $f(x) = f(-x)$ donc f est paire.

3. On étudie les variations sur $\mathbb{R}^+ \cap D$ seulement (on obtiendra l'autre moitié par symétrie, comme f est paire.

   $x \mapsto 3x-7$ est une fonction affine croissante $(3>0)$ et la fonction racine carrée ne change pas la monotonie, donc f est croissante sur $\left[\frac{7}{3}, +\infty\right[$ (décroissante sur l'autre intervalle par symétrie).

4.



5
4
3
2
1
0
−1
−2
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10