EXERCICE 5

On fait une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation :** pour $n = 1$ on obtient l'inégalité $1 < 2$ qui est toujours vraie.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$. (on veut montrer que $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

  Il suffit de montrer que $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$.

  Or :

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1 < 2(n+1) \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} < 2n+1 \\
&\Leftrightarrow \quad 4n(n+1) < (2n+1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 4n^2+4n < 4n^2+4n+1
\end{aligned}$$

  La dernière inégalité étant toujours vraie, on en déduit que $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$ et donc, par transitivité de l'inégalité :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

  On a donc prouvé l'hérédité.
- **Conclusion :** la propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit, d'après le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 7

On fait une récurrence (double) sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** pour $n = 0$ on a : $u_0 = 3$ et $2^{0+1} + 1 = 3$ donc l'égalité est vraie.

  Pour $n = 1$ on a $u_1 = 5$ et $2^2 + 1 = 5$ donc l'égalité est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^{n+1} + 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$.

  (On veut montrer que $u_{n+2} = 2^{n+3} + 1$)

  Or : $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3\left(2^{n+2}+1\right) - 2\left(2^{n+1}+1\right) = 3\cdot 2^{n+2} + 3 - 2^{n+2} - 2 = 2\cdot 2^{n+2} + 1 = 2^{n+3} + 1$.

  L'hérédité est prouvée.
- **Conclusion :** la propriété étant initialisée et héréditaire, on peut conclure, d'après le principe de récurrence (à deux crans), que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 10

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels positifs. On veut montrer que si $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ alors chacun des x_i est nul.
On fait un raisonnement par l'absurde : supposons que l'un des x_i, par exemple x_1 est non nul (aucune perte de généralité). On a alors $x_1 > 0$. Mais alors $x_1 + \cdots + x_n > 0$ (on a ajouté des quantités positives). Ce qui contredit $x_1 + \cdots + x_n = 0$. ABSURDE.
On conclut que tous les x_i sont nuls.
(Autre méthode : on suppose $x_1 > 0$ et $x_1 + \cdots + x_n = 0$, on obtient $x_1 = -(x_2 + \cdots + x_n)$ le terme de gauche étant > 0 et le terme de droite étant $\leqslant 0$ absurde!)

EXERCICE 11

1. On remplace $x = 0$ dans l'équation donnée : on obtient $\boxed{f(0) = 1}$.

   Puis, on remplace $x = 1$: $f(1) + f(0) = 2$ donc $\boxed{f(1) = 1}$.

2. On obtient $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2 - x$.

   On a donc
$$\begin{cases} f(x) & + \quad x f(1-x) & = \quad 1+x \\ f(1-x) & + \quad (1-x)f(x) & = \quad 2-x \end{cases}$$
   Si on suppose $x \neq 0$ (on connaît déjà $f(0)$, on peut multiplier la 2ème ligne du système par x :
$$\begin{cases} f(x) & + \quad x f(1-x) & = \quad 1+x \\ x f(1-x) & + \quad x(1-x)f(x) & = \quad 2x - x^2 \end{cases}$$
   puis on remplace L_2 par $L_2 - L_1$:
$$\begin{cases} f(x) \; + \; x f(1-x) & = \quad 1+x \\ \qquad (-x^2 + x - 1) f(x) & = \quad -x^2 + x - 1 \end{cases}$$
   On vérifie que le discriminant de l'équation $-x^2 + x - 1 = 0$ est strictement négatif donc cette équation ne possède pas de solutions réelle.

   On peut donc diviser par $(-x^2 + x - 1)$ (qui est non nul) la deuxième ligne et on obtient $f(x) = 1$.

   On a donc montré que si f satisfait l'équation demandée, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1$.

3. D'autre part, si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 1$, on vérifie facilement que l'équation est satisfaite.

   On peut donc conclure que l'unique solution de l'équation fonctionnelle donnée est la fonction constante égale à 1.