MPSI - Devoir surveillé de Mathématiques n°5 - 18/01/2025
(4h00, calculatrices interdites)

EXERCICE 1

1.

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j-1} i \\
&= \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j-1)}{2} \\
&= \sum_{j=2}^{n}\frac{j-1}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{2} \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)}{2} \\
&= \boxed{\frac{n(n-1)}{4}.}
\end{aligned}
$$

2.

```
def somme(n):
    s=0
    for j in range(2,n+1):
        for i in range(1,j):
            s=s+i/j
    return(s)
```

EXERCICE 2

1. Soient $(x,y)\in J^2$ et $\lambda\in[0,1]$. On veut montrer que
$$f\circ g\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leqslant \lambda f\circ g(x)+(1-\lambda)f\circ g(y)$$
g étant convexe on a :
$$g\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leqslant \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$$
On applique la fonction f (qu'on sait être croissante sur I) aux deux côtés de l'inégalité :
$$f\left(g\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\right)\leqslant f\left(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\right)$$
mais f est convexe donc on a :
$$f\left(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\right)\leqslant \lambda f\left(g(x)\right)+(1-\lambda)f\left(g(x)\right)$$
on peut donc conclure (par transitivité de l'inégalité) :
$$f\left(g\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\right)\leqslant \lambda f\left(g(x)\right)+(1-\lambda)f\left(g(x)\right)$$
ce qui prouve la convexité de $f\circ g$ sur J.

2. $x^x=\exp\left(\ln(x^x)\right)=\exp(x\ln x)$

   h est donc continue sur $]0,1]$ par produit et composition de fonctions continues sur $]0,1]$. Il reste à montrer la continuité en 0.

   On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ par croissances comparées. On compose avec la fonction exponentielle (qui est continue et on obtient) $\lim\limits_{x\to 0^+}\exp(x\ln x)=1=h(0)$ ce qui prouve la continuité en 0.

3. Montrons que la fonction h de la question précédente est convexe : exp est convexe et croissante. D'après la question 1 il suffit donc de montrer que $x\mapsto x\ln(x)$ est convexe sur $]0,1]$ pour obtenir la convexité de leur composition sur $]0,1]$.

   $x\mapsto x\ln x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1]$ (par produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$) donc on peut la dériver deux fois : pour tout $x\in]0,1]$ on a :
$$f'(x)=\ln x+1\quad f''(x)=\frac{1}{x}>0$$
   On en déduit que $x\mapsto x\ln x$ est convexe sur $]0,1]$ et donc h convexe sur $]0,1]$.

   On peut aussi affirmer que h est convexe sur $[0,1]$ (on vérifie l'inégalité de convexité avec $x=0$ et $y\in]0,1]$ et elle est trivialement vraie).

   On sait alors que, d'après l'inégalité de convexité généralisée : pour tous $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in[0,1]$ tels que $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$ et pour tous $x_1,\dots,x_n\in[0,1]$ on a :
$$h(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant\lambda_1h(x_1)+\cdots+\lambda_nh(x_n)$$
   On prend les $\lambda_i=\dfrac{1}{n}$ et on obtient :
$$h\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{h(x_1)+\cdots+h(x_n)}{n}$$
   c'est-à-dire :
$$\boxed{\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}\leqslant\frac{x_1^{x_1}+x_2^{x_2}+\cdots+x_n^{x_n}}{n}}$$
   (avec l'abus de notation « $0^0=1$ » comme à la question 2 pour le cas où tous les x_i devaient être nuls...)

PROBLÈME 1

Partie I

1. Si $p=1$, alors $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$, donc $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=I$.

   Si $p=0$, alors $A^0=I,\ A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, et on calcule $\forall k\geqslant 2,\ A^k=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

2. On calcule
$$A^2=\begin{pmatrix}p^2&0&0\\2p(1-p)&p^2&0\\(1-p)^2&(1+p)(1-p)&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^2&0&0\\2p(1-p)&p^2&0\\(1-p)^2&1-p^2&1\end{pmatrix}$$
$$A^3=\begin{pmatrix}p^3&0&0\\3p^2(1-p)&p^3&0\\(1+2p)(1-p)^2&(1-p)(1+p+p^2)&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^3&0&0\\3p^2(1-p)&p^3&0\\(1+2p)(1-p)^2&1-p^3&1\end{pmatrix}$$

3. Par récurrence :

   - Si $n=0$, $A^0=I$ et $p^0=1$ donc en prenant $a_0=b_0=c_0=0$, on obtient bien la formule voulue.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $A^n=\begin{pmatrix}p^n&0&0\\a_n&p^n&0\\b_n&c_n&1\end{pmatrix}$.

     On calcule $A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}p^{n+1}&0&0\\a_np+(1-p)p^n&p^{n+1}&0\\b_np+c_n(1-p)&c_np+1-p&1\end{pmatrix}$

     on voit bien que A^{n+1} est de la forme $\begin{pmatrix}p^{n+1}&0&0\\a_{n+1}&p^{n+1}&0\\b_{n+1}&c_{n+1}&1\end{pmatrix}$ avec
$$a_{n+1}=a_np+(1-p)p^n\qquad b_{n+1}=b_np+c_n(1-p)\qquad c_{n+1}=c_np+1-p$$

4. (c_n) est une suite arithmético-géométrique définie par :
$$c_0=0\qquad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N},\quad c_{n+1}=p\cdot c_n+(1-p)$$
   On cherche α tel que $(1-p)\alpha=(1-p)$ on trouve $\alpha=1$.

   On a $(c_{n+1}-1)=p(c_n-1)$ et donc $c_n=1+p^n(c_0-1)$ d'où pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{c_n=1-p^n}$

5. On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=a_np+(1-p)p^n$. Un changement d'indice donne donc : $a_{n+2}=a_{n+1}\cdot p+(1-p)p^{n+1}$.

   Mais alors
$$\begin{aligned}a_{n+2}-2pa_{n+1}+p^2a_n&=a_{n+1}p+(1-p)p^{n+1}-2pa_{n+1}+p^2a_n\\&=-pa_{n+1}+(1-p)p^{n+1}+p^2a_n\\&=-p\big(a_np+(1-p)p^n\big)+(1-p)p^{n+1}+p^2a_n\\&=-p^2a_n-(1-p)p^{n+1}+(1-p)p^{n+1}+p^2a_n\\&=0\end{aligned}$$

On en déduit que (a_n) est une suite définie par une récurrence linéaire d'ordre deux.

Son équation caractéristique est $x^2 - 2px + p^2 = 0$.

Cette équation a discriminant nul, donc possède une unique solution : $x_0 = p$.

On en déduit que la suite (a_n) est de la forme $a_n = p^n(\lambda + \mu n)$. Il reste à déterminer les deux constantes réelles λ et μ.

Or $a_0 = 0$ implique $p^0(\lambda + \mu \cdot 0) = 0$ et donc $\lambda = 0$.

Ensuite $a_1 = 1 - p$, donc $p(\lambda + \mu) = 1 - p$ et ensuite $\mu = \dfrac{1-p}{p}$

On peut donc conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a_n} = p^n\left(n \cdot \frac{1-p}{p}\right) = \boxed{n \cdot p^{n-1}(1-p)}$$

6. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice quelconque dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. $LM = \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{pmatrix}$, donc on voit que pour que M appartienne à E il faut que la somme des coefficients de chacune de ses colonnes soit égale à 1.

   (b) On voit facilement que $A \in E$. Mais alors $LA = L$ et donc en multipliant à droite par A : $LA^2 = LA$ c'est-à-dire $LA^2 = L$ et ainsi de suite, par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $LA^n = L$ et donc $A^n \in E$.

   (c) En particulier, la somme des coefficients de la première colonne de A^n est égale à 1, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p^n + a_n + b_n = 1$ et donc $\boxed{b_n = 1 - a_n - p^n}$

Partie II

1. On voit immédiatement que $B+C=A$ (matrice de la partie I)

2. $C^2=0$ (matrice nulle)

3. On calcule l'inverse :
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0| & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0| & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1| & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0| & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0| & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1| & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(L_3 \leftarrow L_3 + L_1)$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0| & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0| & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1| & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0| & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0| & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1| & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(L_2 \leftarrow -L_2)$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0| & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0| & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1| & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$ (Dès que la matrice de gauche devient triangulaire supérieure, on voit bien que ses coefficients diagonaux sont tous non nuls et donc P est bien inversible).

   On obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $P^{-1}B = \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   On en déduit immédiatement que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $D^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. On a $B = PDP^{-1}$ donc (récurrence immédiate) : $\forall k \in \mathbb{N} : B^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ 1-p^k & 1-p^k & 1 \end{pmatrix}$

6. On a $A^n = (B+C)^n$. On vérifie par le calcul que $BC = CB$ donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :
$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^{n-k} C^k$$
   mais on sait que pour $k \geqslant 2$ on a C^k= 0 Donc on obtient
$$A^n = B^n + nB^{n-1}C = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 1-p^n & 1-p^n & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} p^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & p^{n-1} & 0 \\ 1-p^{n-1} & 1-p^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Et donc on obtient
$$A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ np^{n-1} - np^n & p^n & 0 \\ 1-p^n-np^{n-1}+np^n & 1-p^n & 1 \end{pmatrix}$$
   cela corréspond à la matrice A^n trouvée à la partie I.

PROBLÈME 2

Partie I

1. On sait qu'une fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dérivable si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont dérivables. Or, x et y sont dérivables d'après l'énoncé.

2. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z'(t) &= x'(t) + i y'(t) \\ &= x(t) - y(t) + e^t \cos(t) + i\big(x(t) + y(t) + e^t \sin(t)\big) \\ &= (1+i)x(t) + (i-1)y(t) + e^t \cdot e^{it} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha z(t) + e^{\alpha t} &= (1+i)z(t) + e^{(1+i)t} \\ &= z(t) + i z(t) + e^t \cdot e^{it} \\ &= x(t) + i y(t) + i x(t) - y(t) + e^t \cdot e^{it} \\ &= (1+i)x(t) + (i-1)y(t) + e^t \cdot e^{it} \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité voulue.

3. (a) On considère d'abord l'équation homogène associée :

$$z' - (1+i)z = 0 \quad (E_H)$$

Les solutions sont les fonctions de la forme : $z_h(t) = \lambda e^{(1+i)t}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
On cherche une solution particulière de l'équation non homogène avec la méthode de la variation de la constante :
on pose : $z_p(t) = \lambda(t) e^{(1+i)t}$. On dérive on obtient : $z_p'(t) = \lambda'(t) e^{(1+i)t} + \lambda(t) \cdot (1+i) e^{(1+i)t}$.
On remplace dans l'équation non homogène :

$$\lambda'(t) e^{\alpha t} + \lambda(t) \alpha e^{\alpha t} - \alpha \lambda(t) e^{\alpha t} = e^{\alpha t}.$$

On obtient $\lambda'(t) = 1$.
On peut donc prendre $\lambda(t) = t$ et on obtient $z_p(t) = t e^{(1+i)t}$.
On peut conclure que les solutions de l'équations non homogène sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{z(t) = \lambda e^{(1+i)t} + t e^{(1+i)t}, \quad (\lambda \in \mathbb{C}).}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\big(z(t)\big) \\ &= \mathrm{Re}\big((\lambda_1 + i\lambda_2) e^t (\cos(t) + i \sin(t)) + t e^t (\cos(t) + i \sin(t))\big) \\ &= \boxed{\lambda_1 e^t \cos(t) - \lambda_2 e^t \sin(t) + t e^t \cos(t).} \end{aligned}$$

(avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.)

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{Im}\big(z(t)\big) \\ &= \boxed{\lambda_1 e^t \sin(t) + \lambda_2 e^t \cos(t) + t e^t \sin(t).} \end{aligned}$$

4. On sait que x et y sont dérivables en tant que solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

   Or $\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = x(t) - y(t) + e^t \cos(t)$ donc x' est dérivable par sommes et produits de fonctions dérivables. De manière analogue, on prouve que y' est dérivable.

   Donc x et y sont deux fois dérivables.

5. $$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = y'(t) - y(t) - e^t \sin(t) \\ y''(t) - y'(t) - e^t \sin(t) - e^t \cos(t) = y'(t) - y - e^t \sin(t) - y(t) + e^t \cos(t) \end{array} \right.$$

   $$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = y'(t) - y(t) - e^t \sin(t) \\ y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 2e^t \cos(t) \end{array} \right.$$

6. On résout l'équation caractéristique de (E) :

   $$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

   On trouve $\Delta = -4$ donc les solutions complexes de cette équation sont : $1 + i$ et $1 - i$.

   On en déduit que la solution générale (réelle) de l'équation homogène est de la forme :

   $$y_h(t) = e^t \left(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)\right) \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

7. (a) y_p est deux fois dérivable par produit de fonctions deux fois dérivables.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

   $$y_p'(t) = e^t t \sin(t) + e^t(\sin(t) + t\cos(t)).$$

   $$y_p''(t) = \cdots = e^t \left(2\sin(t) + 2t\cos(t) + 2\cos(t)\right).$$

   En remplaçant dans (E) on obtient bien $y_P''(t) - 2y_P'(t) + 2y_P(t) = 2e^t \cos(t)$ donc y_p est une solution particulière de (E).

   (b) On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions y de la forme :

   $$y(t) = e^t\left(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)\right) + te^t \sin(t) \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

   (on retrouve les solutions y trouvées à la question 3)

   (c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on calcule $x(t)$:

   $$\begin{aligned} x(t) &= y'(t) - y(t) - e^t \sin(t) \\ &= \lambda e^t \cos(t) - \lambda e^t \sin(t) + \mu e^t \sin(t) + \mu e^t \cos(t) + te^t \sin(t) + e^t(\sin(t) + t\cos(t)) - \lambda e^t \cos(t) - \mu e^t \sin(t) - \\ &= -\lambda e^t \sin(t) + \mu e^t \cos(t) + e^t(\sin(t) + t\cos(t)) - e^t \sin(t) \\ &= \boxed{\mu e^t \cos(t) - \lambda e^t \sin(t) + te^t \cos(t)} \end{aligned}$$

   (on retrouve les solutions x trouvées à la question 3)

Partie II

8. $D = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

9. (a) Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = 8 - 6i$. On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 1 \end{array}\right. .$$

Donc les racines carrées de $8 - 6i$ sont $3 - i$ et $-3 + i$.

(b) $\dfrac{z^2}{z - 2i} = 1 + i \Leftrightarrow z^2 = (1 + i)(z - 2i) \Leftrightarrow z^2 - (1 + i)z + (2i - 2) = 0$. Le discriminant de cette équation de second degré est $\Delta = (1 + i)^2 - 4(2i - 2) = 8 - 6i$ dont on connaît déjà les racines carrées. On trouve donc les solutions de l'équation :

$$z_{1,2} = \frac{(1 + i) \pm (3 - i)}{2}.$$

Donc $z_1 = 2$ et $z_2 = i - 1$ sont les antécedents de $1 + i$ par f.

10. $\dfrac{z^2}{z - 2i} = h \Leftrightarrow z^2 - zh + 2ih = 0 (E)$. On calcule le discriminant $\Delta = h^2 - 8ih$. On sait que si $\Delta = 0$ (i.e. $h = 0$ ou $h = 8i$) l'équation (E) a une unique solution alors que si $\Delta \neq 0$ (i.e. $h \in \mathbb{C} \setminus \{0, 8i\}$) alors l'équation (E) a deux solutions distinctes. De plus, on vérifie aisement que $2i$ (la valeur interdite de f) n'est jamais solution.

    Donc 0 et $8i$ possèdent un unique antécedent par f alors que tous les autres complexes en possèdent deux.

11. On a vu que tout nombre complexe admet au moins un antécedent par f, donc f est bien surjective.

12. f n'est pas injective car il existe des complexes ayant deux antécedents distincts.