MPSI - Devoir surveillé de Mathématiques n°5 - 18/01/2025
(4h00, calculatrices interdites)

Consignes : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Pensez à encadrer ou souligner vos résultats. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Le devoir comporte 3 *pages. Il est composé de* 2 *exercices indépendants et deux problèmes, qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité.*
Traitez chaque problème sur une (ou plusieurs) feuille à part!

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On considère la somme double suivante :

$$S_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j}.$$

1. Calculer S_n.
2. Écrire une fonction Python permettant de calculer cette somme double à l'aide de deux boucles.

EXERCICE 2

1. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
   Soit f une fonction convexe et croissante sur I et g une fonction convexe sur J à valeurs dans I.
   Montrer que $f \circ g$ est convexe sur J.
2. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :
   $$h(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Montrer que h est continue sur $[0,1]$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$. Montrer que
   $$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} \leqslant \frac{x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \cdots + x_n^{x_n}}{n}$$

Indication : dans cet exercice les questions ne sont PAS indépendantes ...

PROBLÈME 1

Partie I

Dans tout cet exercice, on fixe $p \in [0,1]$, et la matrice $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}$ L'objectif est de calculer les puissances de A.

1. Que vaut A^n (où $n \in \mathbb{N}$) lorsque $p = 1$? Calculer également les puissances de A lorsque $p = 0$.

   On suppose pour la suite de l'exercice que $p \in]0,1[$.

2. Calculer A^2 et A^3.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$.

   On exprimera de plus a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

4. À l'aide de la relation de récurrence sur les c_n, déterminer l'expression de c_n en fonction de n.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = 0$. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

6. On note L la matrice ligne : $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et on note E l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $LM = L$.

   (a) À quelle condition une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ appartient-elle à E ? (on donnera une propriété élémentaire vérifiée par ses colonnes).

   (b) Vérifier que $A \in E$, puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in E$.

   (c) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.

Partie II : Calcul à l'aide d'une décomposition astucieuse

Cette partie est indépendante de la précédente. Il est donc interdit de réutiliser les résultats démontrés ci-dessus. On pose désormais les matrices

$$B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Que vaut $B + C$?

2. Calculer C^2.

3. Montrer que P est inversible, et calculer P^{-1} (on détaillera ce calcul).

4. Calculer la matrice $D = P^{-1}BP$, et déterminer ses puissances.

5. En déduire les puissances de B.

6. Exprimer A^n en fonction des puissances de B et de C, et en déduire l'expression explicite de A^n en fonction de n.

PROBLÈME 2

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I : équations différentielles

On note $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant le système différentiel :

$$(S) \quad : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + e^t \cos(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + e^t \sin(t) \end{cases}$$

Le but de cette partie est de résoudre ce système différentiel par deux méthodes.

$\boxed{\text{Méthode 1}}$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $z(t) = x(t) + i\,y(t)$.

1. Justifier la dérivabilité de la fonction complexe z sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que $(S) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) = \alpha z(t) + e^{\alpha t}$, où $\alpha = 1 + i$.
3. (a) Résoudre soigneusement l'équation différentielle d'inconnue z ci-dessus (on veut les solutions complexes !).
   (b) En déduire les solutions x et y du système différentiel (S).

$\boxed{\text{Méthode 2}}$

La méthode 1 ci-dessus n'est pas toujours exploitable car on obtient en général z' en fonction de z et de $\overline{z}$. Dans cette partie on ne doit pas utiliser bien sûr les expressions de x et de y obtenues précédemment !

4. Montrer que si x et y sont solutions du système (S), alors elles sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer l'équivalence :

$$(S) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 2e^t \cos(t) \quad (E) \\ x(t) = y'(t) - y(t) - e^t \sin(t) \end{cases}$$

6. (a) Vérifier que $y_p : t \mapsto te^t \sin(t)$ est une solution particulière de (E) ((E) est la première équation du système précédent).
   (b) En déduire toutes les solutions de l'équation (E) (on attend des solutions réelles).
7. Retrouver ainsi les solutions x et y obtenues avec la méthode 1.

Partie II : Applications

On considère la fonction f qui à un complexe z associe, lorsque c'est possible, $f(z) = \dfrac{z^2}{z - 2i}$.

8. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
9. (a) Déterminer les racines carrées complexes (sous forme algébrique) de $8 - 6i$.
   (b) En déduire tous les antécédents de $1 + i$ par f.
10. Soit h un complexe, discuter suivant les valeurs de h le nombre exact d'antécédents de h par f.
11. Déterminer l'image directe de $\mathscr{D}$ par f (c'est-à-dire $f(\mathscr{D})$). f est-elle une application surjective de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{C}$?
12. La fonction f est-elle une application injective de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{C}$?