Devoir surveillé de Mathématiques n°4- Concours blanc n°2.

Classe de KBL. Lycée Michel Montaigne. Année scolaire 2013/2014.

12 février 2014

Consignes : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice et deux problèmes indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. On notera que les questions elles-mêmes de chaque exercice sont relativement indépendantes entre elles. On pourra ainsi admettre la réponse d'une question pour poursuivre et utiliser le résultat admis ultérieurement.

Pensez à encadrer ou souligner vos résultats.

EXERCICE 1

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance m et d'écart type σ. On rappelle que la densité d'une loi normale de paramètres m et σ est :

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On définit alors la variable Y par :

$$Y = e^X$$

et la variable Z par :

$$Z = z_0 + Y$$

où z_0 est un nombre réel.

1. Déterminer la fonction de répartition G de Y en fonction de celle de X, notée Φ.
2. En déduire la densité g de Y. On dit que Y suit une loi log-normale.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y notées respectivement EY et VY.
4. Calculer l'espérance et la variance de Z notées respectivement EZ et VZ.

Problème 1

(A) Loi de la partie fractionnaire d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire admettant la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée continue par morceaux, comme densité. On suppose que f est telle que $|f'|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout entier n positif ou nul, on définit $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par la relation

$$f_n(x) = \frac{x^n \exp(-x)}{n!} ,$$

où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et où par convention $0! = 1$. On rappelle l'équivalent de Stirling : quand n tend vers l'infini,

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} .$$

On rappelle que la fonction de répartition de X est la fonction qui à tout nombre réel t associe $\mathbb{P}(X \leqslant t)$.

1. Quelle est la fonction de répartition d'une variable uniforme sur $[0,1[$?
2. Montrer que f_0 et f_1 sont des densités de probabilité, puis que pour tout entier n positif ou nul, f_n est une densité de probabilité.
3. S'il existe un réel a tel que f soit croissante sur $]-\infty, a]$ et décroissante sur $[a,+\infty[$, exprimer $\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|dx$ à l'aide de $f(a)$.
Indication : on pourra préalablement démontrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
4. Soit g une fonction dérivable définie sur $[0,1[$ telle que $g(0) = g(1) = 0$, et telle qu'il existe un nombre réel C tel que pour tout $x \in [0,1[$, $|g'(x)| \leqslant C$. Montrer :

$$\forall t \in [0,1[,\ |g(t)| \leqslant \frac{C}{2} .$$

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière (c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x) et $\mathrm{frac}(x) \in [0,1[$ sa partie fractionnaire, de sorte que $x = \lfloor x \rfloor + \mathrm{frac}(x)$. Par exemple, $\lfloor 12{,}34 \rfloor = 12$ et $\mathrm{frac}(12{,}34) = 0{,}34$.

5. Montrer que pour tout $t \in [0,1[$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{frac}(X) \leqslant t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k+t) .$$

6. En déduire que pour tout $t \in [0,1[$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{frac}(X) \leqslant t) - t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(t) ,$$

où $g_k : [0,1[\to \mathbb{R}$ est la fonction définie par :

$$g_k(t) = \int_k^{k+t} f(x)dx - t\int_k^{k+1} f(x)dx\,.$$

7. Montrer que g_k est dérivable sur $[0,1[$, puis que :

$$\forall t \in [0,1[\,,\ |g_k'(t)| \leqslant \int_k^{k+1} |f'(x)|dx$$

8. En déduire que :

$$\sup_{t\in[0,1]} |\mathbb{P}\left(\mathrm{frac}(X) \leqslant t\right) - t| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|dx\,.$$

9. Pour tout entier n positif ou nul, soit Z_n une variable aléatoire de densité f_n. Montrer que :

$$\sup_{t\in[0,1]} |\mathbb{P}\left(\mathrm{frac}(Z_n) \leqslant t\right) - t| \to 0$$

quand n tend vers l'infini.

(B) Loi de Benford

Dans cette section, on note $\log_{10}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par la relation $\log_{10}(x) = \ln(x)/\ln(10)$. On a donc pour tous réels a et b strictement positifs les relations $\log_{10}(ab) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b)$ et $\log_{10}(10^a) = a$. On appelle *loi de Benford* la loi de probabilité sur l'ensemble $\mathbb{R}$ dont la fonction de répartition coïncide, sur l'intervalle $[1,10[$, avec la fonction $\log_{10}$.

10. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Benford et si $F = \lfloor X \rfloor$ est sa partie entière (la partie entière est définie juste avant la question 5 de la partie A), montrer que :

$$\mathbb{P}\big(F = 1\big) = \mathbb{P}\big(F \in \{2,3\}\big) = \mathbb{P}\big(F \in \{5,6,7,8,9\}\big)\,.$$

11. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Benford, quelle est la loi de $\log_{10}(X)$?
    Indication : on pourra penser à calculer sa fonction de répartition.

On appelle *mantisse* d'un réel strictement positif x l'unique réel $M(x)$ appartenant à l'intervalle $[1,10[$ tel qu'il existe un entier relatif k pour lequel on puisse écrire $x = M(x) \times 10^k$. Par exemple, $M(123) = 1{,}23$ et $M(0{,}25) = 2{,}5$.

12. Soit k un entier strictement positif. Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]1, 10^k[$, quelle est la loi de $M(X)$?

13. On rappelle que $\mathrm{frac}(x)$, défini juste avant la question 5, désigne la partie fractionnaire d'un réel x. Montrer que pour toute variable aléatoire strictement positive X on a :

$$\mathbb{P}\left(M(X) \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{frac}(\log_{10}(X)) \leqslant \log_{10}(x)\right)\,.$$

14. Pour tout entier n positif ou nul, soit $Y_n = 10^{Z_n}$, où Z_n est une variable aléatoire de densité f_n (fonction définie au début de la partie A). Montrer que :

$$\sup_{t\in[1,10]} \left|\mathbb{P}\big(M(Y_n) \leqslant t\big) - \log_{10}(t)\right| \to 0$$

quand n tend vers l'infini.

Problème 2

On considère les trois matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour a, b, c réels, on pose :

$$M_{a,b,c} = aA + bB + cC.$$

Enfin, on note $\mathscr{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathscr{B} = (A, B, C)$.

Partie 1.

1. Prouver que la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{F}$.
2. Montrer que la matrice B^2 appartient à $\mathscr{F}$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Partie 2.

On considère les matrices suivantes :

$$\begin{cases} M_1 = A - B - C \\ M_2 = 2A - B - 2C \\ M_3 = A \end{cases}$$

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (M_1, M_2, M_3)$ est une base de $\mathscr{F}$.
2. Donner la matrice de passage P, de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Déterminer son inverse P^{-1}.
3. Calculer les produits matriciels suivants :
$$M_1M_2, \quad M_2M_1, \quad M_3M_2, \quad M_2M_3, \quad M_1M_3, \quad M_3M_1.$$
4. Démontrer que pour tout entier naturel k non nul :
$$M_1^k = M_1, \quad M_2^k = M_2 \quad M_3^k = M_3.$$
5. Prouver que le produit de deux éléments de $\mathscr{F}$ est un élément de $\mathscr{F}$.
6. On pose $M_{a,b,c} = xM_1 + yM_2 + zM_3$. Exprimer x, y, z en fonction de a, b, c.
7. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices par :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(M_{a,b,c})^k,$$
avec la convention $(M_{a,b,c})^0 = I$ matrice unité d'ordre 3.
   (a) Exprimer I en fonction de M_1, M_2, M_3.
   (b) Pour tout entier naturel k, donner l'expression de $(M_{a,b,c})^k$ en fonction de $k, a, b, c, M_1, M_2, M_3$.
   (c) Montrer l'existence de trois réels α_n, β_n et γ_n tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \alpha_n M_1 + \beta_n M_2 + \gamma_n M_3.$$
   (d) Montrer que les suites (α_n), (β_n) et (γ_n) convergent vers des réels α, β, γ, que l'on déterminera.